209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

I Approximation des fonctions régulières

1) Approximation locale de fonctions régulières

Théorème 1 (Taylor-Young)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f dérivable n fois en a. Alors :*

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Théorème 2 (Taylor-Lagrange)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f de classe $\mathcal{C}^n$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, et dérivable $n+1$ fois sur $]a,b[$. Alors :*

$$\exists\, c \in \mathring{I},\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Théorème 3 (Taylor avec reste intégral)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Théorème 4 (Bernstein)**.** *Soit $a > 0$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que, pour tout entier k, $f^{(2k)} \geqslant 0$ sur $]-a,a[$. Alors f admet un développement en série entière sur $]-a,a[$.*

2) Densité dans l'espace des fonctions continues

Théorème 5 (Weierstrass)**.** *L'ensemble des polynômes sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*

Remarque 6. *On a aussi le théorème de Stone-Weierstrass : L'ensemble des polynômes trigonométriques sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*

Application 7. *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ vérifiant $\int_a^b t^n f(t)\, dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $f = 0$ sur $[a,b]$.*

Remarque 8. *Ce résultat n'est plus vrai si l'intervalle n'est pas borné. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes alors f est un polynôme.*

II Approximation des fonctions intégrables

1) Convolution, densité et régularisation

Définition 9. On appelle convolution de f et g la fonction $f * g$ définie par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\, dy$ lorsque celle-ci est bien définie.

Proposition 10. *(i) $f \in L^1,\ g \in L^p \Rightarrow \|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.*

(ii) $f \in L^p,\ g \in L^q \Rightarrow \|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Proposition 11. *$(L^1, +, *)$ est une algèbre de Banach.*

Définition 12. Une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives de L^1 d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^d$ est une approximation de l'unité si elles sont d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^d$, et si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \int_{\{|x|>\varepsilon\}\}} \rho_n = 0$. Si les ρ_n sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on parle de suite régularisante.

Théorème 13. *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(\rho_n)_n$ une approximation de l'identité ($p \in [1,+\infty[$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\rho_n * f) = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Théorème 14. *Pour tout $p \in [1,+\infty[$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

2) Cas particulier de L^2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 15. Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et strictement positive, vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$. On dit alors que ρ est une fonction poids.

Définition 16. On définit $L^2(I,\rho)$ comme l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ mesurables vérifiant $\int_I |f(x)|^2 \rho(x)\, dx < +\infty$.

Proposition 17. *$L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle_\rho = \int_X f(x)\overline{g}(x)\rho(x)\, dx$.*

Théorème 18. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < \infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.*

III Interpolation polynômiale

1) Interpolation de Lagrange

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ des points deux à deux distincts de $[a,b]$.

Théorème 19. *Il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. P_n est appelé polynôme interpolateur de Lagrange associé à f et à $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$. On a :*

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(X) \quad \text{où} \quad \ell_i(X) = \prod_{i\neq j} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Théorème 20. *Supposons que f est $(n+1)$ fois dérivable. Alors, pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\zeta_x \in [a,b]$ tel que :*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\zeta_x) \quad \text{où} \quad \Pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} X - x_j$$

On a ainsi : $\|f - P_n\|_\infty \leqslant \frac{\|\Pi_{n+1}\|_\infty}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$.

Exemple 21. *La précision des polynômes interpolateurs provient alors du contrôle de $\|\Pi_{n+1}\|_\infty$, c'est-à-dire de la répartition des points. Dans le cas de points équidistants, on a :*

$$|f - P_n| \leqslant \frac{h^{n+1}}{n+1}\max_{0\leqslant i\leqslant n}\left|f^{(n+1)}(x_i)\right| \quad \text{et} \quad \|\Pi_{n+1}\|_\infty = \mathcal{O}\left(\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}\right)$$

Application 22 (Phénomène de Runge)**.** *Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[-1,1]$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais dont les dérivées augmentent rapidement en norme infinie vers 0. Pour des points équidistants, on a :*

$$\frac{\|\Pi_{n+1}\|_\infty}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

On observe alors que les polynômes d'interpolation ne converge pas uniformément vers f.

Définition 23. On définit par récurrence la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$. On vérifie alors que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition 24. *Les racines de T_{n+1} sont les $\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et sont appelés points d'interpolation de Tchebychev.*

Exemple 25. *Avec les points d'interpolation de Tchebychev, on a :*

$$\|\Pi_{n+1}\|_\infty = \mathcal{O}\left(\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}\right)$$

On obtient alors que les polynômes d'interpolation de Tchebychev sont plus précis que ceux associés à des points équidistants.

Application 26. *Le phénomène de Runge n'est plus observé avec les polynômes d'interpolation de Tchebychev.*

2) Application aux méthodes de quadrature

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche des formules pour approcher $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Fixons $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$. On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Définition 27. Une méthode de quadrature consiste, pour $0 \leqslant i < n$ à approcher $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par $A_i(f)$ défini par :

$$A_i(f) = h_i\sum_{j=0}^{n_i}\omega_{i,j}f(\zeta_{i,j}) \quad \text{où} \quad \zeta_{i,j} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n_i}\omega_{i,j} = 1$$

On note alors $E(f) = I(f) - \sum_{i=0}^{n-1} A_i(f)$ l'erreur de la méthode.

Définition 28. Une méthode de quadrature est d'ordre N si $E(f) = 0$ pour tout $f \in \mathbb{R}_N[X]$ et s'il existe $f \in \mathbb{R}_{N+1}[X]$ telle qu'elle soit inexacte.

Application 29. *En fixant $(\zeta_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ associé à une subdivision de $[x_i, x_{i+1}]$, on peut prendre pour fonction de poids $\omega_j = \frac{1}{h_i}\int_{[x_i,x_{i+1}]}\ell_j$, où $\ell_j = \prod_{k\neq j}\frac{X-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k}$. Ce sont les méthodes par interpolation de Lagrange.*

- *(i) Méthode des rectangles : $I(f) \sim \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(z_i)$ où $z_i = x_i$ ou x_{i+1}. Méthode d'ordre 0.*
- *(ii) Méthode des points milieux : $I(f) \sim \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(z_i)$ où $z_i = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$. Méthode d'ordre 1 et $E(f) \leqslant \frac{1}{3}\|f''\|_\infty$ si f est $\mathcal{C}^2$.*
- *(iii) Méthode des trapèzes : $I(f) \sim \sum_{i=0}^{n-1} h_i\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$. Méthode d'ordre 1 et $E(f) \leqslant \frac{2}{3}\|f''\|_\infty$ si f est $\mathcal{C}^2$.*
- *(iv) Méthode de Simpson : $I(f) \sim \sum_{i=0}^{n-1} h_i\frac{f(x_{i+1})+4f(\frac{x_i)+x_{i+1}}{2})+f(x_i)}{6}$. Méthode d'ordre 3 et $E(f) = \mathcal{O}\left(\left\|f^{(4)}\right\|_\infty\right)$ si f est $\mathcal{C}^4$.*

IV Approximation de fonctions périodiques

On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et on considère des fonction 2π-périodiques que l'on identifie à des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.

1) Définition des séries de Fourier

Définition 30. On pose $CM(\mathbb{T})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux, et $C(\mathbb{T})$ le sous-espace vectoriel formé des fonctions continues. On considère $L^p(\mathbb{T})$ comme identifié avec $L^p([0, 2\pi])$.

Définition 31. Les coefficients exponentiels de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ sont :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Les coefficients trigonométriques de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ sont :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt \ , \ b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt \quad (n \in \mathbb{N})$$

Définition 32. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On appelle série de Fourier de f la série :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on appelle somme de Fourier d'ordre N :

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

Proposition 33. *Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $a \in \mathbb{R}$ et $k, n \in \mathbb{Z}$. Alors :*

(i) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ *(où $\check{f}(x) = f(-x)$)*

(ii) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

(iii) $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$ *(où $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$)*

(iv) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f) e_n$ *(où $e_k(t) = t^{ikt}$)*

Proposition 34. *Soit $f \in C(\mathbb{T})$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors $f' \in CM(\mathbb{T})$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f') = in\, c_n(f)$.*

Théorème 35 (Riemann-Lebesgue)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors $c_n(f)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $\pm\infty$.*

2) Convergence de Fejér

Théorème 36 (Fejér)**.** *Pour $f \in C(\mathbb{T})$, la moyenne de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$.*

Corollaire 37. *Tout élément de $C(\mathbb{T})$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Corollaire 38. *Soit $f \in C(\mathbb{T})$. Si $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} = 0$, alors $f = 0$.*

3) Convergence dans L^2

Proposition 39. *Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, la somme $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N.*

Théorème 40 (Bessel)**.** *Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $N \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\|c_n(f)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \|f\|_2^2$$

Théorème 41 (Parseval)**.** *Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2$.*

Corollaire 42. *Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $S_N(f)$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{T})$.*

Développements

- Théorème de Weierstrass (5) [Gou08]
- Densité des polynômes orthogonaux (18) [BMP05]

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses, 2008

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* H&K, 2005

[Dem06] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences, 2006